

УДК 621.777: 621.984.5

Александров А. А.  
Ковальчук А. И.**О НЕКОТОРЫХ ГРАФИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ К РАСЧЕТАМ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ**

При проектировании процессов обработки металлов давлением одним из критериев выбора варианта является условие минимума деформирующей силы. Для расчетов процессов находят широкое применение метод верхней оценки (МВО) [1–5].

Особый интерес для развития теории механики сплошной среды и твердого тела может представлять геометрический анализ результатов оптимизационных решений МВО процессов пластического деформирования металла.

Целью работы является установление особенностей оптимизационных результатов решения задач МВО путем геометрических построений.

Геометрический анализ оптимизационных результатов покажем на примере задачи прямого выдавливания (волочения) полосы через симметричную клиновую матрицу решенный указанными методами. При использовании разрывных полей скоростей в виде треугольных блоков простейшая расчетная схема может иметь вид, представленный на рис. 1. Ввиду симметричности схемы показана ее половина.

Относительная удельная сила по МВО определяется выражением [8]:

$$p = \frac{\tau_s}{\sin \alpha} \cdot \left( \frac{h_1 + h_3}{h_2} + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_2}{h_3} - 4 \cos \alpha \right) + \frac{\tau_k}{\sin \alpha} \cdot \frac{h_1 - h_3}{h_2}. \quad (1)$$

При деформировании в гладкой матрице ( $\tau_k = 0$ ) значение силы минимально когда  $h_2 = \sqrt{h_1 \cdot h_3}$ . Видно, что высота очага не зависит от угла и соответствует этому значению при любом заданном угле клина матрицы, что совпадает результатом, полученным в работе [3]. Вместе с тем при заданной величине обжатия оптимальный угол гладкой матрицы находится из уравнения:

$$\cos \alpha = 2 \cdot \sqrt{h_1 \cdot h_3} / (h_1 + h_3). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим  $p = 4 \cdot \tau_s \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Обратим внимание геометрические условия (рис. 2), при которых величина удельной силы минимальна: высота  $h_2 = a = b = l/2$ ; угол  $\psi = \pi/4 - \alpha/2$ ; угол между границами блоков 1 и 3 равен  $\pi/2$ . Длина контактной поверхности заготовки с матрицей –  $l_2 = h_1 + h_3$ , что соответствует диаметру описанной окружности (рис. 2, а), а ее проекция на ось симметрии равна диаметру вписанной окружности равнобедренного треугольника (рис. 2, б), боковые стороны которого являются продолжением линии клина матрицы до оси симметрии. Расстояния от точки пересечения высоты 2 зоны с матрицей (фокус) равна расстояниям  $h_1$  и  $h_3$  до соответствующих высот, причем линии  $l_{12}$  и  $l_{23}$  являются биссектрисами углов между  $l_2$  и  $h_1$ , а также  $l_2$  и  $h_3$  (свойство семейства парабол, для которых ось симметрии схемы – директриса).

Анализ геометрических соотношений, соответствующих минимуму силы, выявил эффект наложения годографа скоростей на физическую плоскость. Используя данный эффект, осуществим построения кривой, связанной с решением задачи, задав единичное значение одной из скоростей на годографе в соответствии с рис. 3. Изменение угла клина матрицы (при фиксированном значении скорости  $V_2$ ) позволяет получить кривую, которую образуют высоты  $h_1$  и  $h_3$ , связанные уравнением (2) через функцию угла  $\alpha$ .

На рис. 4 показано, что профили контактной поверхности матрицы и заготовки, построение которых ведется из полюса, в интервале изменения угла  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$ , образуют две ветви кривой, пересекающиеся в узловой точке под углом  $\pi/4$ . Левая ветвь (лежащая в интервале значений по оси абсцисс от 1 до 2) уходит в бесконечность, а правая ветвь (в интервале значений по оси абсцисс от 0 до 1) имеет локальный максимум.

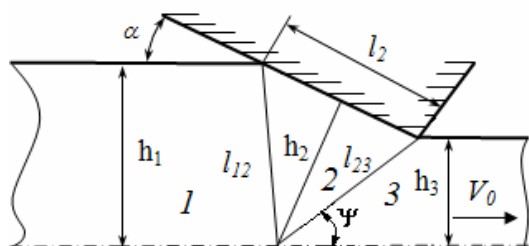


Рис. 1. Расчетная схема процесса волочения

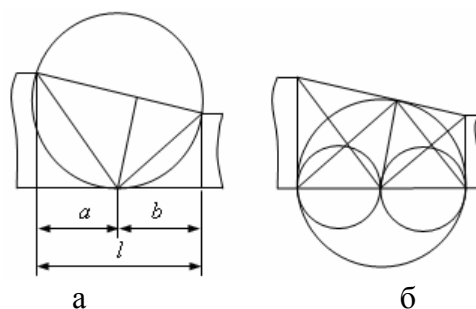


Рис. 2. Геометрические условия оптимального результата ( $\mu = 0$ )

Связь между физической плоскостью и годографом скоростей, когда вектор скорости второго блока располагается на оси симметрии схемы процесса (рис. 6), описывается уравнением:

$$h_1 = [\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} (\pi/4 - \alpha/2)] / 2R,$$

где  $R$  – единичное значение скорости  $V_2$  на годографе скоростей.

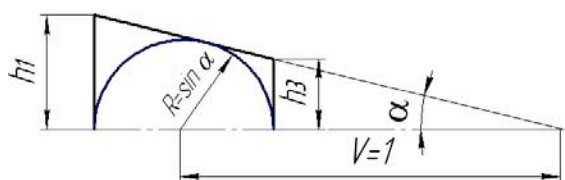


Рис. 3. Отображение скорости на схеме процесса

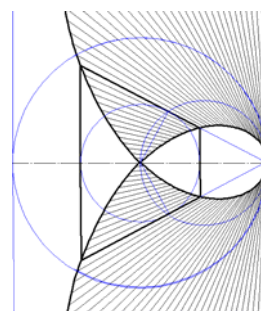


Рис. 4. Построение строфоиды

Уравнение правой ветви кривой:

$$П(\alpha) = (1 - \sin \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{3}$$

Угол  $\alpha = \arcsin(1 - r)$ , где  $r = 1 - \sin(\alpha)$  – длина проекции радиус-вектора, проведенного из полюса до правой ветви кривой. Запишем уравнение (3) для правой ветви в виде функции от  $r$ :

$$П(r) = [1 - \sin(\arcsin(1 - r))] \cdot \operatorname{tg}[\arcsin(1 - r)].$$

Оно также может быть представлено следующим образом:

$$П(r) = r \cdot (1 - r) / \sqrt{r \cdot (2 - r)}. \tag{4}$$

После дифференцирования (4) получим:

$$П'(r) = \frac{1 + 3r - r^2}{(2 - r) \cdot \sqrt{r \cdot (2 - r)}}.$$

Приняв  $П'(r) = 0$ , найдем значения  $r$ , при которых правая ветвь кривой имеет максимум:

$$r_1 = (3 + \sqrt{5}) / 2; \quad r_2 = (3 - \sqrt{5}) / 2 = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 = \Phi^2.$$

Поскольку  $0 < r < 1$ , следовательно,  $r = r_2$ . Подставляя  $r = \Phi^2$  ( $\Phi$  – число Фидия) в уравнение (4), получим:

$$П(\Phi) = \frac{\Phi^2 \cdot (1 - \Phi^2)}{\sqrt{\Phi^2 \cdot (2 - \Phi^2)}} = \Phi^2 \cdot \sqrt{\Phi} = \Phi^{\frac{5}{2}}.$$

Это значение максимума совпадает с результатом из работы [6], и показывает явную связь полученного решения с «золотой» пропорцией. Вид кривой, сопутствующие признаки и геометрические свойства схемы позволяют заключить, что эта кривая – строфоида. Хотя, С. А. Ясинский в [6] называет кривую удлинённой циклоидой, а не строфоидой, так как им не были выявлены те характерные геометрические фигуры – трапеции, использованные нами при её построении. По-видимому, поэтому он заключает, что трапеция слабо отражает динамику взаимодействия между средними числами.

Вместе с тем, основным общим свойством всех прямоугольных трапеций, является не только наличие этого взаимодействия, но и связи с определяемой в данной задаче величиной деформирующей силы, а также возможностью её графического измерения.

Отметим, что строфоида и подобные ей кривые третьего порядка используются в аэродинамических расчетах и называются ударными полярами.

Показанное построение строфоиды отвечает частному случаю решения задачи без учета трения на поверхности матрицы. Однако нетрудно получить подобным образом целое семейство кривых (гипоциссоид). Величина оптимального угла матрицы клина в зависимости от толщины полосы до и после деформации и коэффициента трения  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) находится из уравнения:

$$\cos \alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_1 \cdot h_3}{\mu \cdot (h_1^2 - h_3^2) + (h_1 + h_3)^2}}. \quad (5)$$

Отметим, что при  $\mu = 1$  петля, которую образует правая ветвь гипоциссоиды, является окружностью.

Все значения максимумов правых ветвей гипоциссоид при  $0 \leq \mu \leq 1$  описываются кубическим уравнением:

$$\mu(x) = (x - 1) \cdot [x - (1,5 + \sqrt{5}/2)] \cdot [x - (1,5 - \sqrt{5}/2)].$$

Можно видеть, что это уравнение также связано с «золотой» пропорцией.

На рис. 5 показаны графики значений оптимального угла клина матрицы определенные из выражения (5) в зависимости от обжатия  $\varepsilon = (h_1 - h_3)/h_1$  и коэффициента трения  $\mu$ . На рис. 6 показаны окружности, построенные на годографе скоростей, которые определяют соотношения между скоростями жестких блоков при оптимизационном решении. Эти соотношения, как и коэффициент трения, всегда могут быть определены графическим путем, поскольку результат решения геометрически связан со среднегармоническим параметром (рис. 8) [8].

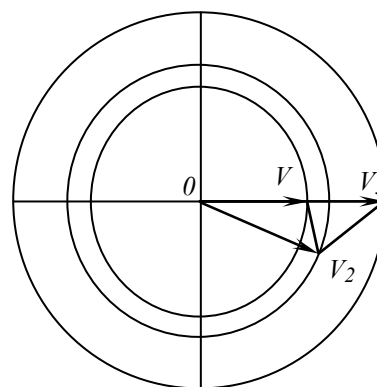
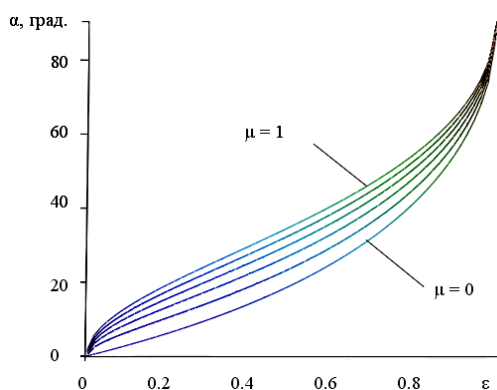


Рис. 5. Графики оптимального угла матрицы в зависимости от обжатия  $\varepsilon$  и коэффициента трения

Рис. 6. Окружности, построенные  $\mu$  на годографе скоростей

При угле матрицы, определяемом из уравнения (6), минимальная удельная сила:

$$p = 2\tau_s \sqrt{\frac{(h_1 - h_3)^2 + \mu(h_1^2 - h_3^2)}{h_1 \cdot h_3}} = 4\tau_s \operatorname{tg} \alpha.$$

Данный расчетный полный минимум деформирующей силы всегда геометрически отвечает условию наложения годографа скоростей на физическую плоскость с образованием треугольника  $ABO$ , вершина которого на оси симметрии располагается посередине между входным и выходным сечениями матрицы (рис. 7). Углы при вершинах на оси симметрии треугольников  $ABC$  и  $ABO$  равны между собой. «Скрытый» треугольник  $ABO$  показывает согласование с условием, принимаемым в расчетах: сечение перпендикулярно оси симметрии как до, так и после деформации.

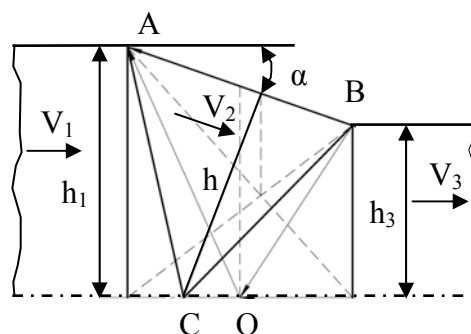


Рис. 7. Геометрические построения по условию минимума силы при совмещении плоскостей годографа скоростей и схемы процесса

Покажем, что с использованием годографа скоростей (рис. 8) такое соответствие легко проверяется следующим графическим методом определения актуального положения сечения в процессе деформирования заготовки.

Примем, что сечение в первой зоне (исходное состояние до деформации) перпендикулярно оси симметрии (рис. 9, б).

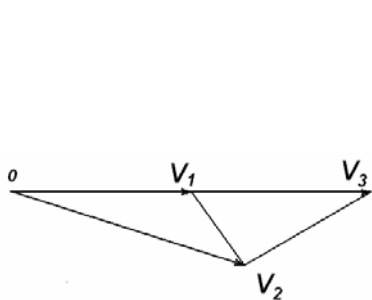


Рис. 8. Годограф скоростей

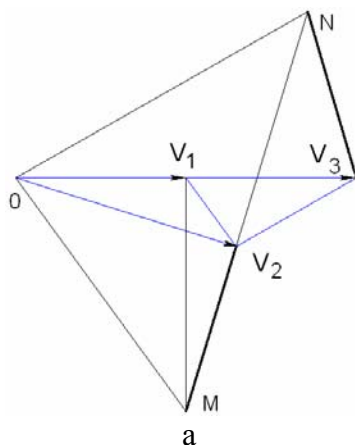
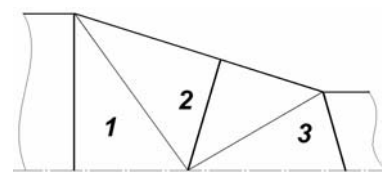


Рис. 9. Построение изменения положения сечения: а – в плоскости годографа; б – в физической плоскости



б

Для определения положения сечения во второй зоне в плоскости годографа (рис. 9, а) проводятся две прямые – одна из полюса годографа скоростей параллельно вектору  $V_{1-2}$ , а другая из конца вектора скорости 1 блока  $V_1$  перпендикулярно к этому вектору до их пересечения. Соединяя точку  $M$  пересечения этих прямых с концом вектора  $V_2$ , получаем линию, показывающую положение сечения в очаге деформации.

Для определения положения сечения на выходе из матрицы проводятся две прямые – одна из полюса годографа скоростей параллельно вектору  $V_{2-3}$ , а другая из конца вектора скорости 2 блока  $V_2$  параллельно найденному положению (направлению) волокна в очаге деформации до их пересечения в точке  $N$ . Соединяя эту точку с концом вектора  $V_3$ , находим искомое положение сечения на выходе из матрицы, определяя таким образом поворот сечения после прохождения двух линий сдвига.

На рис. 10 показана поэтапная деформация квадратной ячейки и вписанной в неё окружности, которые после прохождения линий сдвига между зонами 1–2 и 2–3 преобразуются соответственно в параллелограмм и в эллипс.

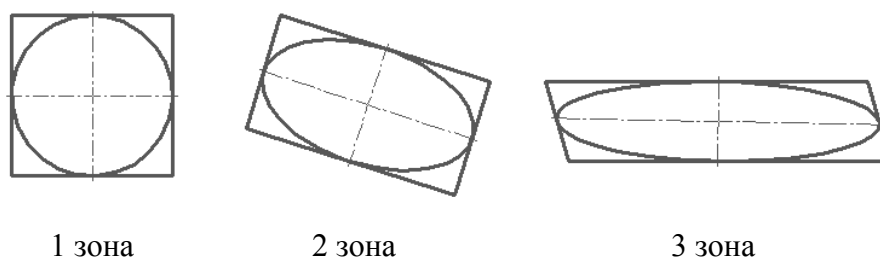


Рис. 10. Деформация квадратной ячейки (окружности) на линиях сдвига

Последовательность построения изменения формы элементарной квадратной ячейки  $A_1B_1C_1D_1$  представлена на рис. 11. Отметим, что при использовании нижеследующих приёмов построения площадь деформируемой ячейки не изменяется, следовательно, условие постоянства объема строго выполняется.

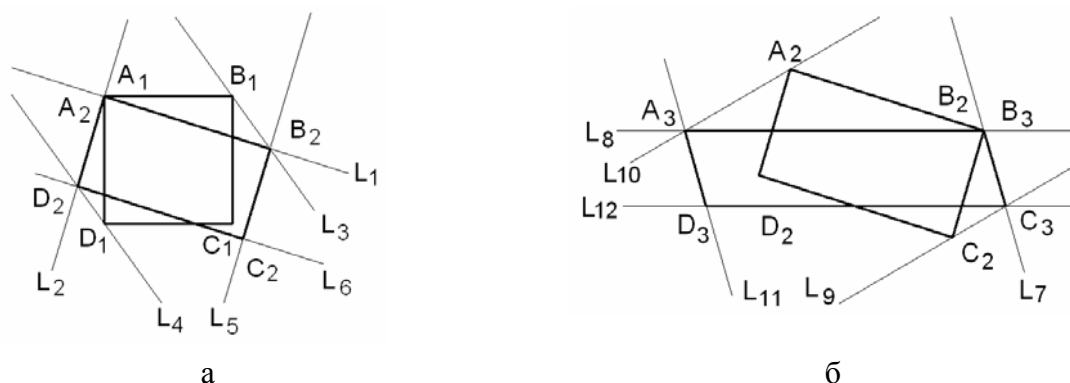


Рис. 11. Построение искажения элементарной ячейки (а) во 2 зоне, (б) в 3 зоне

Через точку  $A_1$  (рис. 11, а) проводятся две линии –  $L_1$  и  $L_2$ . Линия  $L_1$  параллельно направлению скорости  $V_2$ , а линия  $L_2$  параллельно отрезку  $MN$  (рис. 9, а), определяющему направление сечения во 2 зоне. Затем из точек  $B_1$  и  $D_1$  проводятся линии  $L_3$  и  $L_4$  параллельные отрезку  $OM$  до пересечения с линиями  $L_1$  и  $L_2$  проходящими через точку  $A_1$ . Точки их пересечения обозначены как  $B_2$  и  $D_2$ . Затем через точки  $B_2$  и  $D_2$  проводятся линии  $L_5$  и  $L_6$  параллельные отрезку  $MN$  и направлению скорости  $V_2$  соответственно. Они пересекаются в точке  $C_2$ . Соединяя все найденные точки (точки  $A_1$  и  $A_2$  совпадают), получаем параллелограмм  $A_2B_2C_2D_2$ , представляющий вид деформированной элементарной ячейки после прохождения линии сдвига между зонами 1 и 2.

Аналогичным образом, можно получить вид деформированной элементарной ячейки после прохождения линии сдвига между зонами 2 и 3 (рис. 9, б). Для этого через точку  $B_2$  проводятся линия  $L_8$  параллельно направлению скорости  $V_3$ , а линия  $L_7$  параллельно отрезку, определяющему положение сечения в 3 зоне (рис. 9, а). Из точек  $A_2$  и  $B_2$  проводятся линии  $L_9$  и  $L_{10}$  параллельные отрезку  $ON$  до пересечения с линиями  $L_7$  и  $L_8$ . Точки их пересечения

обозначены как  $A_3$  и  $C_3$ . Затем через найденные точки  $A_3$  и  $C_3$  проводятся линии  $L_{11}$  и  $L_{12}$  параллельные линиям  $L_7$  и  $L_8$ . Их пересечение дает точку  $D_3$ . Соединяя все найденные точки (точки  $B_2$  и  $B_3$  совпадают), получаем искомым параллелограмм  $A_3B_3C_3D_3$ .

Далее по найденным параллелограммам рассчитываются длины осей эллипсов и соответствующие деформации.

Отметим, что показанные приемы определения положения сечения применимы и к расчету процесса деформирования в несимметричной матрице.

Расчеты и построения показывают, что при условии полного минимума при нулевом трении сечение при прохождении очага деформации всегда перпендикулярно поверхности матрицы.

С применением данного метода можно получить наглядное изображение положения волокон по сечению деформируемой заготовки. Использование показанных приемов определения деформации сетки и направления волокна непосредственно на годографе скоростей упрощает вычисления, а также дополняет и расширяет возможности известного метода построения линий тока и искажения прямоугольной сетки [3].

Сравнение геометрических результатов по форме и размера очага деформации с решениями этой и подобных задач из работ [1, 2, 4], основанные на построении кругов Мора, показало их полное совпадение. Это дает основание утверждать о наличии геометрической единственности решения, имеющей связь с «золотой» пропорцией.

## ВЫВОДЫ

Впервые установлено, что кривой, связанной с условием полного минимума при нулевом трении на матрице, является строфоида. Подтверждено, что результаты оптимизационного решения задачи деформирования листа в гладкой клиновидной матрице имеют связь с «золотой» пропорцией.

Разработана методика графического расчета искажения прямоугольной сетки с использованием годографа скоростей, которая дополняет и расширяет возможности известного метода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор. – М. : Машиностроение, 1979. – 568 с.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
3. Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Металлургия, 1972. – 408 с.
4. Степанский Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением / Л. Г. Степанский. – М. : Машиностроение, 1979 – 215 с.
5. Теория обработки металлов давлением : учебник для вузов / В. А. Голенков, С. П. Яковлев, С. А. Головин, С. С. Яковлев, В. Д. Кухарь; под ред. В. А. Голенкова, С. П. Яковлева. – М. : Машиностроение, 2009. – 442 с.
6. Ясинский С. А. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи / С. А. Ясинский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.
7. Александров А. А. Графо-аналитическая модификация метода верхней оценки / А. А. Александров // Известия ТулГУ. – Тула : ТулГУ. – Вып. 2. – 2004. – С. 51–59. – (Сер. «Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением»).

Александров А. А. – канд. техн. наук, доц. СибАДИ;

Ковальчук А. И. – аспирант СибАДИ.

СибАДИ – Сибирская государственная автомобильная дорожная академия, г. Омск, Россия.

E-mail: omsk-aaa@rambler.ru